MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 9
20.12.2019

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ -Lösungsvorschlag-

1. Zunächst bemerken wir, daß f eine (wohldefinierte) Abbildung ist, denn für $x, y \in \mathbb{Q}$ ist auch $2x - 3y \in \mathbb{Q}$ und $3x - 6y \in \mathbb{Q}$, also $f(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
Wir suchen nun zu beliebig vorgegebenem $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ein Paar $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit $f(x, y) = (a, b)$, betrachten also die Gleichung

$$f(x, y) = (a, b)$$

und suchen deren Lösung(en).

<u>1. Möglichkeit:</u>
Sei $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Dann gilt für $(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}
& f(x,y) = (a,b) \\
\iff\quad & (2x-3y, 3x-6y) = (a,b) \\
\iff\quad & 2x - 3y = a \quad \wedge \quad 3x - 6y = b \\
\iff\quad & 4x - 6y = 2a \quad \wedge \quad 3x - 6y = b \\
\iff\quad & x = 2a - b \quad \wedge \quad 3x - 6y = b \\
\iff\quad & x = 2a - b \quad \wedge \quad 3(2a-b) - 6y = b \\
\iff\quad & x = 2a - b \quad \wedge \quad 6y = 6a - 4b \\
\iff\quad & x = 2a - b \quad \wedge \quad y = a - \frac{2}{3}b \\
\iff\quad & (x,y) = \big(2a - b,\, a - \frac{2}{3}b\big) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}. \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Also ist $(x, y) = \big(2a - b,\, a - \frac{2}{3}b\big)$ ein solches Paar (das ist die Richtung „$\Longleftarrow$“ in der obigen Rechnung), und zwar das einzig mögliche (das ist die Richtung „ $\Longrightarrow$ “). Ersteres zeigt, daß f surjektiv ist, zweiteres, daß f injektiv ist. Es ist dann also f bijektiv mit

$$f^{-1} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, \quad f^{-1}(a, b) = \big(2a - b,\, a - \frac{2}{3}b\big).$$

<u>2. Möglichkeit:</u>
Statt obige Rechnung mit “$\Longleftrightarrow$“ durchzuziehen, kann man sich auch auf “$\Longrightarrow$“ beschränken, muß anschließend allerdings dann die „Probe“ machen.
Sei $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Dann gilt für $x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}
& f(x,y) = (a,b) \\
\iff\quad & (2x-3y, 3x-6y) = (a,b) \\
\iff\quad & 2x - 3y = a \quad \wedge \quad 3x - 6y = b \\
\iff\quad & \text{(I)}\ \ 4x - 6y = 2a \quad \wedge \quad \text{(II)}\ \ 3x - 6y = b \\
\overset{\text{(I)-(II)}}{\Longrightarrow}\quad & x = 2a - b \\
\overset{\text{in (II)}}{\Longrightarrow}\quad & 3(2a-b) - 6y = b \\
\iff\quad & 6y = 6a - 4b \\
\iff\quad & y = a - \frac{2}{3}b.
\end{aligned}$$

Damit hat die Gleichung $f(x,y) = (a,b)$, wenn überhaupt, nur die einzig mögliche Lösung, nämlich $(x,y) = \big(2a-b,\, a-\frac{2}{3}b\big)$; die Abbildung f ist also schon mal injektiv.
Durch Einsetzen zeigt man nun sofort, daß in der Tat

$$f(x,y) = f\big(2a-b,\, a-\frac{2}{3}b\big) = \quad ... \quad = (a,b)$$

gilt. Damit ist f auch surjektiv, also bijektiv, mit

$$f^{-1}: \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, \quad f^{-1}(a,b) = \big(2a-b,\, a-\frac{2}{3}b\big).$$

<u>3. Möglichkeit:</u>
Man definiert die Abbildung

$$g: \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, \quad g(a,b) = \big(2a-b,\, a-\frac{2}{3}b\big),$$

und rechnet nach, daß für dieses g gilt:

$(g\circ f)(x,y) = (x,y)$ für alle $(x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ **und** $(f\circ g)(a,b) = (a,b)$ für alle $(a,b)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$.

(Die Idee zu g bekommt man durch eine Rechnung wie der 2. Möglichkeit dargestellt.)

Auch dann hätte man gezeigt, daß f bijektiv mit

$$f^{-1}: \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}, \quad f^{-1}(a,b) = \big(2a-b,\, a-\frac{2}{3}b\big).$$

2. a) Wir zeigen die Aussage

$$\text{Für alle } n\in\mathbb{N}_0 \text{ ist } \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

mit vollständiger Induktion (nach n).

Induktionsanfang: Sei $n=0$. Dann ist $\sum\limits_{k=1}^{0} k^3 = 0$ (leere Summe) und $\frac{1}{4}0^2\,(0+1)^2 = 0$, die Behauptung stimmt also.

Induktionsschluß: $n\to n+1$: Es sei $n\geq 0$ und es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2. \qquad (\textbf{Induktionsvoraussetzung}).$$

$$\text{Zu zeigen ist:} \quad \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \tfrac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \qquad (\textbf{Induktionsbehauptung}).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 && \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)}\\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 + (n+1)^3\\
&= (n+1)^2\cdot(\frac{1}{4}n^2+n+1)\\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4)\\
&= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war.

b) Wir zeigen die Aussage

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ ist} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

mit vollständiger Induktion (nach n).

Induktionsanfang: Sei $n = 1$. Dann ist $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k\sqrt{k}} = 1$ und $3 - \frac{2}{\sqrt{1}} = 1$, so daß also die behauptete Ungleichung stimmt: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{1}}$.

Induktionsschluß: $n \to n+1$: Es sei $n \geq 1$ und es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} \qquad \big(\textbf{Induktionsvoraussetzung}\big).$$

$$\text{Zu zeigen ist:} \quad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \qquad \big(\textbf{Induktionsbehauptung}\big).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\sqrt{k}} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \\
&\leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung anwenden)} \\
&\stackrel{!}{\leq} 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

Die mit einem Ausrufezeichen versehene Ungleichung beweisen wir mit der folgenden Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned}
& 3 - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} \\
\iff \quad & \frac{2}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \\
\iff \quad & \frac{2(n+1)+1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n}} \\
\stackrel{(*)}{\iff} \quad & \frac{(2n+3)^2}{(n+1)^3} \leq \frac{4}{n} \qquad \text{(für „}\Longrightarrow\text{“: quadrieren; für „}\Longleftarrow\text{“: Wurzel ziehen)} \\
\iff \quad & n \cdot (2n+3)^2 \leq 4(n+1)^3 \\
\iff \quad & n \cdot (4n^2 + 12n + 9) \leq 4 \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) \\
\iff \quad & 4n^3 + 12n^2 + 9n \leq 4n^3 + 12n^2 + 12n + 4) \\
\iff \quad & 0 \leq 12n - 9n + 4 \\
\iff \quad & 0 \leq 3n + 4 \qquad \text{(wahre Aussage).}
\end{aligned}$$

Die Äquivalenzumformung an der mit $(*)$ markierten Stelle ist richtig, weil die beteiligten Zahlen alle ≥ 0 sind; es gilt ja für $a, b \geq 0$: $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \iff a \leq b \iff a^2 \leq b^2$.

Es sei noch bemerkt, daß prinzipiell ausgeschlossen ist, die behauptete Ungleichung $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} < 3$ *direkt* mittels vollständiger Induktion zu beweisen: Denn dazu müsste man aus einer Ungleichung der Form $A < 3$ eine Ungleichung $A + B < 3$ mit $B > 0$ folgern, und das ist nicht möglich, weil man nicht weiss, „wie nah“ A bereits an der Grenze 3 liegt. Genau diese Quantifizierung des Abstands ist aber gegeben, wenn man sogar $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$ weiß, wie in der Induktionsvoraussetzung unseres Beweises.

3. Die Eigenschaft i) einer Peanostruktur (Definition 5.1 der Vorlesung) ist erfüllt, denn die Funktion $\nu : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $\nu(n) = n + 1$, ist injektiv.

   Eigenschaft ii) ist ebenfalls erfüllt, denn es gibt kein $n \in N = \mathbb{R}_0^+$ mit $\nu(n) = 0$, d.h. $n + 1 = 0$.

   Jedoch ist Eigenschaft iii) *nicht* erfüllt: Denn für die Teilmenge $M := \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{R}_0^+ = N$ gilt $0 = n_0 \in M$, und für jedes $m \in M = \mathbb{N}_0$ gilt auch $m + 1 = \nu(m) \in \mathbb{N}_0 = M$. Es ist jedoch $\mathbb{N}_0 \subsetneqq \mathbb{R}_0^+$, während Eigenschaft iii) erzwingen würde, daß $\mathbb{N}_0 = \mathbb{R}_0^+$ gilt.

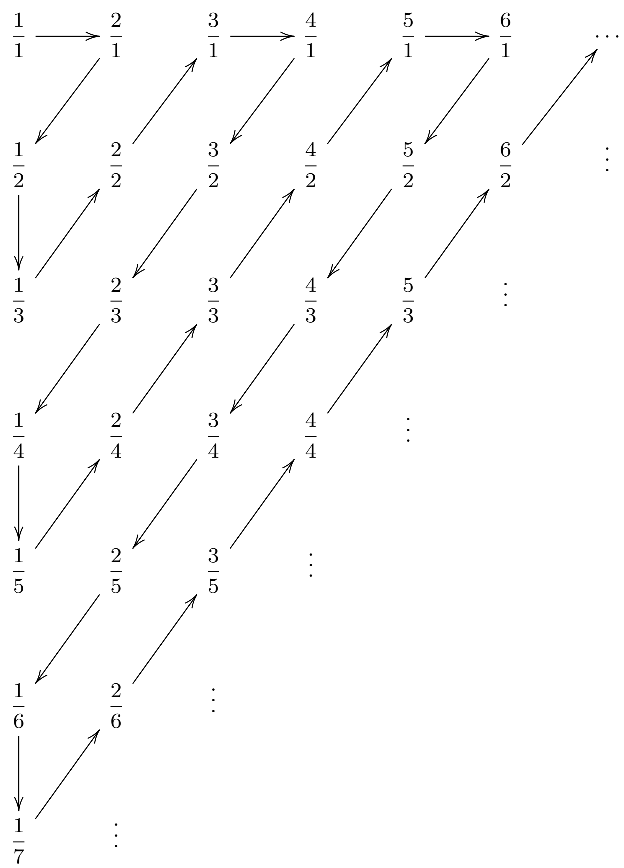
   Damit ist (N, n_0, ν) *keine* Peanostruktur. (Grob gesagt: Die Menge hat „zu viele“ Elemente, als daß man sie durch stetiges Nachfolgerbilden ausschöpfen könnte.)

4. a) Da $\mathbb{N}$ eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$ ist, können wir einfach folgende Abbildung definieren:

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(x) = \begin{cases} x & , \text{ falls } x \in \mathbb{N} \\ 2020 & , \text{ falls } x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}. \end{cases}$$

   Dies ist offenbar eine wohldefinierte und surjektive Abbildung.

   b) Der gegebene Pfad



   bricht offensichtlich niemals ab und erreicht in dieser unendlich nach rechts und unten fortgesetzten Tabelle jeden Bruch, d.h. die Funktion f ist surjektiv. Injektiv ist sie aber nicht, da in der Tabelle viele ungekürzte Brüche vorkommen. So ist zum Beispiel $f(1) = \frac{1}{1} = 1 = \frac{2}{2} = f(5)$.

   c) **Eine Antwort in Worten:** Wir haben eine surjektive Abbildung f von $\mathbb{N}$ auf alle positiven Brüche. Wir können sie so modifizieren, daß wir $g(1) = 0$ setzen und den Weg in obigem Bild (dann bei 2 beginnend) so durchschreiten, daß wir vor dem Weitergehen erst noch das Negative jedes Bruches abklappern. Als Wertetabelle:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$g(x)$	0	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	...

Es ist klar, daß dies eine surjektive Abbildung $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ liefert.

d) **Eine Antwort in Worten:** Wir können dieselbe Konstruktion wie oben mit dem Zusatz wiederholen, daß wir ungekürzte Brüche bei unserem diagonalen Weg überspringen. Dann wird kein Bruch in $\mathbb{Q}$ mehrfach erreicht und wir erhalten eine bijektive Funktion zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$. Nach der Definition aus der Vorlesung haben die beiden Mengen dann dieselbe Mächtigkeit, es gilt

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|.$$

Dies enspricht natürlich nicht der Intuition, da $\mathbb{Q}$ in einem gewissen Sinne deutlich *mehr* Zahlen enthält als $\mathbb{N}$, aber bei unendlichen Mengen versagen eben solche intuitiven Vorstellungen.

Noch eine kleine Randbemerkung: Die reellen Zahlen sind, wie Cantor mit einem verwandten Trick beweisen konnte, nicht gleichmächtig zu $\mathbb{N}$, d.h. es kann keine bijektive Abbildung $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ geben. Das geht aber etwas über den Horizont dieser Veranstaltung hinaus.